

## I вариант

**Задача 1.** Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх относится к сумме всех членов без последних трёх как 4 : 3. Найти количество членов этой прогрессии.

**Задача 2** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может как говорить правду, так и лгать). Рыцари считаются людьми высшего ранга, обычные люди — среднего, а лжецы — низшего. А, В и С — жители этого острова. Один из них — рыцарь, другой — лжец, а третий — обычный человек. А и В сказали следующее. А: “В по рангу выше, чем С.” В: “С по рангу выше, чем А.” Что ответил С на вопрос: “Кто выше по рангу — А или В?”

**Задача 3.** Четырёхзначное число  $X$  не кратно 10. Сумма числа  $X$  и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, равна  $N$ . Оказалось, что число  $N$  делится на 100. Найдите  $N$ .

**Задача 4** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 65 и 31 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$ .

**Задача 5** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 + 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 + 18xy + 8y^2 = 6. \end{cases}$$

**Задача 6.** Для  $x = \pi/2n$  найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \dots + \cos^2(nx)$$

**Задача 7** Прямая  $c$  задается уравнением  $y = x + 1$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(1; 0)$  и  $B(3; 0)$ . На прямой  $c$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\ln(x + a) - 4(x + a)^2 + a = 0$  имеет единственный корень?

**Задача 9.** В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 8, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

**Задача 10** В конус вписан цилиндр объема 9. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 63. Найдите объем исходного конуса.

## II вариант

**Задача 1.** Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 5 : 4. Найдите количество членов этой прогрессии.

**Задача 2** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова, А и В, сказали следующее. А: “В — рыцарь.” В: “А — лжец.” Докажите, что либо один из них говорит правду, но это не рыцарь, либо один из них лжет, но это не лжец.

**Задача 3.** Четырёхзначное число  $X$  не кратно 10. Сумма числа  $X$  и числа, полученного из  $X$  перестановкой его второй и третьей цифр, делится на 900. Найдите остаток от деления числа  $X$  на 90.

**Задача 4** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 155 и 13 соответственно, а ее диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AD}$  и  $\overline{BC}$ .

**Задача 5** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 26x^2 - 42xy + 17y^2 = 10; \\ 10x^2 - 18xy + 8y^2 = 6. \end{cases}$$

**Задача 6.** Для  $x = \pi/2n$  найдите значение суммы

$$\sin^2(x) + \sin^2(2x) + \sin^2(3x) + \dots + \sin^2(nx)$$

**Задача 7** Прямая  $c$  задается уравнением  $y = 2x$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(2; 2)$  и  $B(6; 2)$ . На прямой  $c$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$  имеет единственный корень?

**Задача 9.** В турнире по минифутболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 2 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раза больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 3, на третью — 1 : 4, на четвертую — 1 : 7. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

**Задача 10** В конус вписан цилиндр объема 9. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 63. Найдите объем исходного конуса.

## III вариант

**Задача 1.** Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 3 : 2. Найдите количество членов этой прогрессии.

**Задача 2** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет). Два жителя называются *однотипными*, если они либо оба рыцари, либо оба лжецы. А, В и С — жители этого острова. А говорит: “В и С однотипны”. Что ответит С на вопрос “А и В однотипны?”

**Задача 3.** Если из четырехзначного числа  $X$  вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число  $N = K^2$ , причем  $K$  — натуральное число, дающее остаток 2 при делении на 10 и остаток 6 при делении на 11. Найдите число  $N$ .

**Задача 4** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 65 и 31 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ .

**Задача 5** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 + 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 + 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

**Задача 6.** Для  $x = \pi/2n$  найдите значение суммы

$$\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \dots + \cos^2(nx)$$

**Задача 7** Прямая  $c$  задается уравнением  $y = x + 1$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(1;0)$  и  $B(3;0)$ . На прямой  $c$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\ln(x + a) - 4(x + a)^2 + a = 0$  имеет единственный корень?

**Задача 9.** В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 5 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс пятикратную сумму, т. е. получает в шесть раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 1, на третью — 1 : 5, на четвертую — 1 : 6. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

**Задача 10** В конус вписан цилиндр объема 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 91. Найдите объем исходного конуса.

## IV вариант

**Задача 1.** Сумма первых 13 членов некоторой арифметической прогрессии составляет 50% от суммы последних 13 членов этой прогрессии. Сумма всех членов этой прогрессии без первых трёх членов относится к сумме всех членов без последних трёх как 6 : 5. Найдите количество членов этой прогрессии.

**Задача 2** На острове каждый житель либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжет), либо обычный человек (может и говорить правду, и лгать). Жители этого острова А и В сказали следующее. А: “В — рыцарь.” В: “А — не рыцарь.” Докажите, что по крайней мере один из них говорит правду, но это не рыцарь.

**Задача 3.** Если из четырехзначного числа  $X$  вычесть сумму его цифр, то получится натуральное число  $N = K^2$ , причем  $K$  — натуральное число, дающее остаток 5 при делении на 20 и остаток 3 при делении на 21. Найдите число  $N$ .

**Задача 4** Основания  $AB$  и  $CD$  трапеции  $ABCD$  равны 155 и 13 соответственно, а ее боковые стороны взаимно перпендикулярны. Найдите скалярное произведение векторов  $\overline{AC}$  и  $\overline{BD}$ .

**Задача 5** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x^2 - 14xy + 10y^2 = 17; \\ 4x^2 - 10xy + 6y^2 = 8. \end{cases}$$

**Задача 6.** Для  $x = \pi/2n$  найдите значение суммы

$$\sin^2(x) + \sin^2(2x) + \sin^2(3x) + \dots + \sin^2(nx)$$

**Задача 7** Прямая  $c$  задается уравнением  $y = 2x$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют координаты  $A(2; 2)$  и  $B(6; 2)$ . На прямой  $c$  найдите точку  $C$ , из которой отрезок  $AB$  виден под наибольшим углом.

**Задача 8.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $\ln(x - 2a) - 3(x - 2a)^2 + 2a = 0$  имеет единственный корень?

**Задача 9.** В турнире по волейболу принимаются ставки на четыре команды. На первую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 2 (при выигрыше первой команды игрок получает сумму, которую он поставил на эту команду и плюс двукратную сумму, т. е. получает в три раз больше поставленных денег, а при проигрыше деньги не возвращаются). На вторую команду ставки принимаются в соотношении 1 : 4, на третью — 1 : 5, на четвертую — 1 : 6. Можно ли так поставить, чтобы выиграть при любом исходе турнира?

**Задача 10** В конус вписан цилиндр объема 21. Плоскость верхнего основания этого цилиндра отсекает от исходного конуса усеченный конус объемом 91. Найдите объем исходного конуса.